Diferenciální rovnice

→ z matalýzy známe tzv. **obyčejné diferenciální rovnice (ODR)**:

pro daný interval $(t_0, T) \subset \mathbb{R}$, vektor $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^d$ a funkci $\vec{f}: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \times (t_0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (\vec{y}, t) \longmapsto \vec{f}(\vec{y}, t) \end{array}$

ODR: chceme najít $y: (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ takovou, že $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ a zároveň $\forall t \in (t_0, T)$ platí

$$\vec{y}\,'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t), t)$$

→ ale existují i „složitější" verze:
- parciální diferenciální rovnice (PDR)
  (≡ „v rovnici vystupují i parciální derivace")
- stochastické diferenciální rovnice (SDR)
  (≡ „nezávislá proměnná t odpovídá náhodné veličině/procesu")

& uvidíme, že přístup k numerické aproximaci jejich řešení jsou založeny na základních numerických postupech pro ODR.

Motivační příklady ODR:

zjednodušené verze realistických problémů z praxe, kde nejsme schopni problém vyřešit „tužka-a-papír"

- Farmakologie & koncentrace léků / látek v krvi: $y'(t) = -c \cdot y(t) + g(t)$

  ⇝ koncentrace $y(t)$ klesá v čase přímo úměrně sama sobě & roste na základě vnějších inputů

- Demografie & epidemiologie: <u>SIR model</u> – komunita vystavená nakažlivé nemoci

  $S(t)$ ... % nenakažených (susceptible)
  $I(t)$ ... % nakažených (infected)
  $R(t)$ ... % „vyléčených" (removed)
  (≡ nemohou být znovu nakaženi)

$$\begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ \gamma \cdot I(t) \end{bmatrix}$$

.... % nenakažených klesá přímo úměrně součinu % nenakažených · % nakažených → toto % se nakazí

.... % nakažených klesá přímo úměrně samo sobě → toto % se „vyléčí"

koeficienty modelu → nakažlivost, úmrtnost, ...

<u>Lotka-Voltera model</u> – populace predátorů (lišek) ... $p(t)$ ... & kořisti (zajíců) ... $k(t)$ ...

$$k'(t) = \boxed{\alpha} \cdot k(t) - \boxed{\beta} \cdot k(t) \cdot p(t)$$
.... populace kořisti roste úměrně své velikosti & klesá úměrně „potkávání predátorů"

$$p'(t) = \boxed{-\gamma} \cdot p(t) + \boxed{\delta} \cdot k(t) \cdot p(t)$$
.... populace predátorů klesá úměrně své velikosti & roste úměrně „potkávání kořisti"

koeficienty zachycují rychlost množení, neúspěšnost lovu, soupeření o teritorium, ...

- & mnoho dalších → kniha Exploring ODEs od Trefethen et al.

Numerická aproximace ODR

Náš set-up: místo řešení $\vec{y}: [t_0, T) \to \mathbb{R}^d$ se spokojíme s aproximací hodnot přesného řešení v bodech $t_0, t_1 := t_0 + \tau, t_2 := t_0 + 2\tau, \dots$

Hledáme tedy posloupnost $\vec{y}_0 \approx \vec{y}(t_0), \vec{y}_1 \approx \vec{y}(t_1), \vec{y}_2 \approx \vec{y}(t_2), \dots$

obecně $t_n := t_0 + n \cdot \tau$ & $\vec{y}_n \approx \vec{y}(t_n)$ ...... $\tau > 0$ tzv. délka kroku
$\rightsquigarrow$ pro $\tau \to 0$ očekáváme „konvergenci"

Tento postup má tu výhodu, že $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ známe $\to$ počáteční podmínka našeho ODR

$\Rightarrow$ stačí vymyslet „pravidlo/metodu", která aproximuje $\vec{y}_1$ na základě $\vec{y}_0$, následně $\vec{y}_2$ na základě $\vec{y}_1$ $\to$ „krok po kroku"

$\to$ tzv. <u>jednokrokové metody</u> (existují i vícekrokové, ale my se k nim nedostaneme)

$\Rightarrow$ mám $\vec{y}_0$ & chci $\vec{y}_1 \approx \vec{y}(t_1) = \vec{y}(t_0 + \tau)$ (obecně mám $\vec{y}_n \approx \vec{y}(t_n)$ & chci $\vec{y}_{n+1} \approx \vec{y}(t_{n+1})$)

Postup 1: derivace je limita

- $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\vec{y}(t_0+\tau) - \vec{y}(t_0)}{\tau} = \vec{y}\,'(t_0) = \vec{f}(\vec{y}(t_0), t_0)$ $\rightsquigarrow$ aproximujeme „škrtnutím limity" a dostaneme pro malé konečné $\tau > 0$: $\dfrac{\vec{y}(t_0+\tau) - \vec{y}(t_0)}{\tau} \approx \vec{f}(\vec{y}(t_0), t_0)$ tj. $\vec{y}(t_0+\tau) \approx \vec{y}(t_0) + \tau \vec{f}(\vec{y}(t_0), t_0)$

  $\Rightarrow \vec{y}(t_1) \approx \vec{y}_1 := \vec{y}_0 + \tau \cdot \vec{f}(\vec{y}_0, t_0) \to$ obecně $\vec{y}_{n+1} := \vec{y}_n + \tau \cdot \vec{f}(\vec{y}_n, t_n)$ **Eulerova explicitní metoda**

- tenhle „limitní trik" lze ale použít i na pravou stranu:

  $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\vec{y}(t_0+\tau) - \vec{y}(t_0)}{\tau} = \vec{y}\,'(t_0) = \lim\limits_{\tau \to 0} \vec{f}(\vec{y}(t_0+\tau), t_0+\tau) \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{y}(t_0+\tau) \approx \vec{y}(t_0) + \tau \cdot \vec{f}(\vec{y}(t_0+\tau), t_0+\tau)$

  & pak pro malé konečné $\tau > 0$ dostáváme aproximaci $\vec{y}_1 \approx \vec{y}(t_0+\tau)$ jako řešení rovnice (nikoliv pomocí explicit. vzorečku)

  $\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + \tau \vec{f}(\vec{y}_1, t_1) \to$ obecně $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \cdot \vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1})$ **Eulerova implicitní metoda**

$\to$ obě metody lze graficky interpretovat: $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \cdot \vec{k}$

$\Updownarrow$

můj další bod je to kam se dostanu, když se vydám ze současného bodu o krok τ ve směru $\vec{k}$

explicitní Euler: volím směr $\vec{k} = \vec{f}(\vec{y}_n, t_n) \equiv \dfrac{d}{dt}\left(\vec{y}_{(t_n, \vec{y}_n)}(t_n)\right) \equiv$ derivace („směrnice tečny") řešení ODR, které prochází bodem $(t_n, \vec{y}_n)$ $\equiv$ výchozím bodem

implicitní Euler: volím směr $\vec{k} = \vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) \equiv \dfrac{d}{dt}\left(\vec{y}_{(t_{n+1}, \vec{y}_{n+1})}(t_{n+1})\right) \equiv$ derivace („směrnice tečny") řešení ODR, které prochází bodem $(t_{n+1}, \vec{y}_{n+1})$ $\equiv$ bodem kam chci dojít

Postup 2: škrtání limit → škrtání členů Taylora

$$y'(t_0+\tau) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\tau + y''(t_0)\cdot\frac{\tau^2}{2!} + y^{(3)}(t_0)\cdot\frac{\tau^3}{3!} + \dots$$

- $y'(t_0) = f(y(t_0), t_0)$

&
- $y''(t_0) = \frac{d}{dt}\left(f(y(t),t)\right)\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial y} f(y(t_0),t_0)\cdot y'(t_0) + \frac{\partial}{\partial t} f(y(t_0),t_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(y_0,t_0)\cdot f(y_0,t_0) + \frac{\partial}{\partial t} f(y_0,t_0)$
- $y^{(3)}(t_0) = \frac{d}{dt}\left(y''(t)\right)\Big|_{t=t_0} = \dots$

$$\Rightarrow y'(t_0+\tau) \approx y_1 := \begin{cases} \bullet\ y_0 + \tau\cdot f(y_0,t_0) \\ \bullet\ y_0 + \tau f(y_0,t_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(y_0,t_0)\cdot f(y_0,t_0) + \frac{\partial}{\partial t} f(y_0,t_0) \\ \bullet\ y_0 + \tau f(y_0,t_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(y_0,t_0)\cdot f(y_0,t_0) + \frac{\partial}{\partial t} f(y_0,t_0) + \dots \end{cases}$$

Postup 3: inverz derivace je integrál → kvadratury

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t),t) \quad \forall t\in(t_0,t_0+\tau) \ \&\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} y'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{f}(\vec{y}(t),t)\,dt \Rightarrow y(t_0+\tau) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{f}(y(t),t)\,dt$$

⇒ využitím kvadraturních pravidel získáme aproximaci integrálu a tedy i aproximaci $\vec{y}_1 \approx \vec{y}(t_0+\tau)$.

- $\int_\alpha^\beta g(s)\,ds \approx (\beta-\alpha)\cdot g(\alpha) \Rightarrow \vec{y}'(t_0+\tau) \approx \vec{y}_1 := \vec{y}_0 + \tau\cdot\vec{f}(\vec{y}_0,t_0)$ → Expl. Euler
- $\int_\alpha^\beta g(s)\,ds \approx (\beta-\alpha)\cdot g(\beta) \Rightarrow \vec{y}'(t_0+\tau) \approx \vec{y}_1$ takovým, že platí $\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + \tau\vec{f}(\vec{y}_1,t_1)$ → Impl. Euler

→ všechno funguje protože tyto kvadratury pracují s hodnotami pouze v bodech t_0 (≡ známe vše) nebo t_1 (≡ hledáme $\vec{y}_1$ skrze rovnici)

- $\int_\alpha^\beta g(s)\,ds \approx (\beta-\alpha)\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ je přesnější (≡ má vyšší řád) než ty kvadratury výše → povede na „lepší" metodu?

  $\Rightarrow \vec{y}'(t_0+\tau) \approx \vec{y}_0 + \tau\cdot\vec{f}\left(\vec{y}(t_0+\tfrac{1}{2}\tau), t_0+\tfrac{1}{2}\tau\right)$ → jenže při „analogickém postupu" dostaneme, že hledáme $\vec{y}_1$ t., že platí

  $\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + \tau\cdot\vec{f}(\vec{y}_{1/2}, t_{1/2})$ → protože neznáme $\vec{y}_{1/2}$, toto není soustava rovnic s jednoznačným řešením $\vec{y}_1$

▪ Řešení: Rungeho metoda

Jak aproximovat $\vec{y}(t_0+\frac{1}{2}\tau)$? → $\vec{y}(t_0+\frac{1}{2}\tau) \approx \vec{y}_{1/2} := \vec{y}_0 + \frac{1}{2}\tau\cdot\vec{f}(\vec{y}_0,t_0)$ použili jsme expl. Eulera

Výsledkem je $\vec{y}_1 := \vec{y}_0 + \tau\cdot\vec{f}\Big(\underbrace{\vec{y}_0 + \tfrac{1}{2}\tau\cdot\vec{f}(\vec{y}_0,t_0),\ t_0+\tfrac{1}{2}\tau}_{}\Big)$ → tzv. Rungeho metoda

všechny výrazy na pravé straně umíme přímo vyhodnotit

→ jedná se o explicitní metodu (≡ nemusím řešit algebraické rovnice)

Ten princip „řešení" výše jde zobecnit → tzv. Runge-Kutta metody

Nejdřív si ale rozmyslíme jak „měřit" kvalitu numerických metod:

$$err_f(n,\tau) := \| \vec{y}^{(exact)}(t_n) - \vec{y}_n \|$$ ..... „lokální" chyba v bodě t_n

$$E_f(\tau) := \max_{n=1,2,\dots} err_f(\tau,n)$$ ..... „globální" chyba aproximace

err_f i E_f závisí na $\tau = T/N$ & očekáváme, že pro $\tau \to 0$ (≡ tzn. stále se zvětšující počet bodů na $[t_0,T]$) bude platit $E_f(\tau) \to 0$. To „jak rychle" $E_f(\tau) \xrightarrow{\tau \to 0} 0$ závisí na konkrétní metodě kterou jsme získali aproximace $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots$ a tato rychlost se nazývá <u>řád metody</u>:

- největší $p \in \mathbb{N}$ pro které platí $E_f(\tau) = \mathcal{O}(\tau^p)_{\tau \to 0}$ nazýváme <u>řád metody</u>.
- Navíc platí: $\| \vec{y}^{exact}(t_0+\tau) - \vec{y}_1 \| = \mathcal{O}(\tau^{q+1})_{\tau \to 0} \Rightarrow E_f(\tau) = \mathcal{O}(\tau^q)_{\tau \to 0}$
  a tedy řád metod lze odvodit z lokální chyby (≈ „rychlost se zmenší o 1")

Jakého řádu je explicitní Euler?

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ \vec{y}^{(exact)}(t_0+\tau) \overset{Taylor}{=} \vec{y}(t_0) + \tau \cdot \vec{y}'(t_0) + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &\cdot\ \vec{y}_1 = \vec{y}_0 + \tau \cdot \vec{f}(\vec{y}_0, t_0) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\vec{y}'^{(exact)}(t_0) = \vec{f}(\vec{y}_0, t_0)} \| \vec{y}^{(exact)}(t_0+\tau) - \vec{y}_1 \| = \mathcal{O}(\tau^2)_{\tau \to 0} \Rightarrow E_f(\tau) = \mathcal{O}(\tau)_{\tau \to 0}$$

... tedy expl. Euler je řádu 1 $(p=1)$

Jaký je řád implicitního Eulera?

$$\vec{y}^{(exact)}(t_0) = \vec{y}^{(exact)}(t_1 - \tau) = \vec{y}(t_1) + (-\tau)\vec{y}'(t_1) + \mathcal{O}(\tau^2) \Rightarrow \vec{y}^{(exact)}(t_0+\tau) = \vec{y}(t_0) + \tau \cdot \overbrace{\vec{y}'(t_1)}^{\vec{f}(\vec{y}(t_1),t_1)} + \mathcal{O}(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \vec{y}^{(exact)}(t_0+\tau) - \vec{y}_1 \| = \tau \cdot \| \underbrace{\vec{f}(\vec{y}(t_1),t_1) - \vec{f}(\vec{y}_1,t_1)} \| + \mathcal{O}(\tau^2) \le \tau \cdot \| \vec{y}(t_1) - \vec{y}_1 \| \cdot C + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$\left[\ \exists \vec{z}\ \text{t.že} \le \| \vec{y}(t_1) - \vec{y}_1 \| \cdot \| \nabla_y \vec{f}(\vec{z}, t_1) \|\ \right]$ .... věta o střední hodnotě z kalkulu/matalýzy

$$\Rightarrow (1 - C\tau) \cdot \| \vec{y}^{(exact)}(t_1) - \vec{y}_1 \| = \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$\Rightarrow \| \vec{y}^{(exact)}(t_1) - \vec{y}_1 \| = \mathcal{O}(\tau^2)$$ .... tedy implicitní Euler je také řádu 1

jak zkonstruovat „lepší" metody – tj. vyšších řádů?

Obecné explicitní metody typu Runge-Kutta

→ zobecníme postup Rungeho metody: „vyhodnocování $\vec{f}$ uvnitř $\vec{f}$ uvnitř $\vec{f}$ ...."

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{f}(\vec{y}(t), t)\,dt \approx \tau\left(b_1 \vec{k}_1 + b_2 \vec{k}_2 + \dots + b_s \vec{k}_s\right) \equiv \tau \sum_{i=1}^{s} b_i \vec{k}_i$$

tzv. stage vektory – v řeči kvadratur odpovídají vyhodnocení $\vec{f}(\cdot,\cdot)$ v nějakých bodech v $(t_0, t_0+\tau)$

& $\boxed{\vec{y}_1 := \vec{y}_0 + \tau \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \vec{k}_i}$

tzv. Butcher koeficienty – v řeči kvadratur by odpovídaly vahám „w_i" přeškálovaným $1/\tau$

- $b_i \in \mathbb{R}$ a jsou nezávislé na $\vec{f}$ (stejně jako w_i v kvadratur)
  → pro různé volby b_i dostanu různé metody → některé budou dobré, jiné budou špatné

- $\vec{k}_i \in \mathbb{R}^d$ jsou závislé na $\vec{f}$ ⇝ jedná se o zobecnění konceptu „vyhodnoť $\vec{f}$ uvnitř $\vec{f}$" z Rungeho metody

$$\vec{k}_1 := \vec{f}(\vec{y}_0, t_0)$$
$$\vec{k}_2 := \vec{f}(\vec{y}_0 + \tau \cdot a_{21}\vec{k}_1,\ t_0 + \tau \cdot c_2)$$
$$\vec{k}_3 := \vec{f}(\vec{y}_0 + \tau \cdot (a_{31}\vec{k}_1 + a_{32}\vec{k}_2),\ t_0 + \tau \cdot c_3)$$
$$\vdots$$
$$\vec{k}_i := \vec{f}\left(\vec{y}_0 + \tau \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\vec{k}_j,\ t_0 + \tau \cdot c_i\right)$$
$$\vdots$$
$$\vec{k}_s := \vec{f}\left(\vec{y}_0 + \tau \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \cdot \vec{k}_j,\ t_0 + \tau \cdot c_s\right)$$

→ $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{i1}, \dots, a_{i,i-1}, \dots, a_{s1}, \dots, a_{s,s-1} \in \mathbb{R}$ & & $c_2, c_3, \dots, c_s \in (0,1)$ jsou parametry nezávislé na $\vec{f}$. Platí to samé jako u $b_1, \dots, b_s$ → → některé volby povedou na dobré metody a jiné ne

→ tato metoda je stále explicitní, protože $\vec{k}_2$ využívá pouze $\vec{k}_1$, $\vec{k}_3$ pouze $\vec{k}_2, \vec{k}_1$ atd. ⇝ když postupujeme od $i=1$ k $i=s$, stačí vždy vyhodnocovat

→ pokud postoupíme „o krok dopředu" a budeme aproximovat $\vec{y}(t_2) \approx \vec{y}_2$ na základě $\vec{y}_1$, pak zjevně obdržíme jiné vektory $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_s$ – přestože a_{ij}, c_i zůstávají stejné

Příklad (Rungeho metoda podruhé):

Rungeho metoda odvozená u „Postup 3" odpovídá volbě $s=2$ & $a_{21} = \frac{1}{2}$ & $c_2 = \frac{1}{2}$ & $b_1 = 0$ & $b_2 = 1$ →

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + \tau \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_0 + \tfrac{\tau}{2}\vec{f}(\vec{y}_0, t_0),\ t_0 + \tau/2\right)$$
$$\vec{y}_2 = \vec{y}_1 + \tau \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_1 + \tfrac{\tau}{2}\vec{f}(\vec{y}_1, t_1),\ t_1 + \tau/2\right)$$
$$\vdots$$

Věta:

Pro libovolné $s \in \mathbb{N}$ a koeficienty $\{b_i\}_1^s, \{c_i\}_1^s, \{a_{ij}\}_{i>j} \in \mathbb{R}$ má výsledná explicitní metoda typu Runge-Kutta řád nejvýše s, tj. $p \leq s$.

Obecný zápis koeficientů:

$$\vec{b} := [b_1, \dots, b_s] \in \mathbb{R}^s$$
$$\vec{c} := [c_1, \dots, c_s]^T \in \mathbb{R}^s$$
$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{s,s-1} & a_{ss} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

→ Butcher table

$$\begin{array}{c|c} \vec{c} & A \\ \hline & \vec{b} \end{array}$$

& některé koeficienty $= 0$ např. c_1 nebo a_{ij} pro $i \leq j$

Grafická interpretace: $\vec{k}_i = \vec{f}\Big(\underbrace{\vec{y}_0 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\vec{k}_j}_{\equiv \text{nějaký bod} =: \vec{y}_0^{(i)}},\ \underbrace{t_0 + \tau \cdot c_i}_{\equiv \text{nějaký bod} =: t_0^{(i)}}\Big) = \underbrace{\vec{f}(\vec{y}_0^{(i)}, t_0^{(i)})}_{\equiv \vec{y}\,'(t_0^{(i)})}$

protože $c_i \in (0,1) \to$
$\to t_0^{(i)} \in (t_0, t_1)$

$\to$ derivace přesného řešení problému $[\vec{y}\,'(t) = \vec{f}(\vec{y}, t)\ \&\ \vec{y}(t_0) = ?]$
$\to$ ale ne nutně s tou správnou počáteční podmínkou

$\Rightarrow \vec{y}_1 := \vec{y}_0 + \tau \cdot (b_1\vec{k}_1 + \dots + b_s\vec{k}_s)$

začínám v předchozí aproximaci

půjdu dopředu o krok τ

ve směru, který je lineární kombinací tečen přesných řešení v několika bodech $t_0^{(1)}, \dots, t_0^{(s)}$, ale odpovídající „nepřesným počátečním podmínkám"

Zápis koeficientů do Butcher table $\begin{array}{c|c} \vec{c} & A \\ \hline & \vec{b}^T \end{array}$ kde $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{bmatrix}$ navozuje otázku: co kdybychom si vzali obecnou matici $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$, která nemá horní △ nulový?

Obecné implicitní metody typu Runge-Kutta

Pokud budeme následovat stejný postup, ale $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ je obecná matice, pak dostaneme:

$$\vec{y}_1 := \vec{y}_0 + \tau \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \vec{k}_i \quad \& \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}\Big(\vec{y}_0 + \tau \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{1j}\vec{k}_j,\ t_0 + c_1\tau\Big) \\ &\ \vdots \\ \vec{k}_i &= \vec{f}\Big(\vec{y}_0 + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\vec{k}_j,\ t_0 + c_i\tau\Big) \\ &\ \vdots \\ \vec{k}_s &= \vec{f}\Big(\vec{y}_0 + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{sj}\vec{k}_j,\ t_0 + c_s\tau\Big) \end{aligned}}$$

<u>Věta</u>: Pro libovolné $s \in \mathbb{N}$ a koeficienty $\{b_i\}_1^s, \{c_i\}_1^s, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^s$ má výsledná RK metoda řád nejvýše $2s$, tj. $p \leq 2s$. Navíc, koeficienty pro metodu řádu $p = 2s$ jsou známé a odpovídají tzv. Gaussově (aka Gauss-Legendrově) metodě typu Runge-Kutta.

$\vec{k}_1$ závisí na $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_s \to$ vlastně všechny $\vec{k}_i$ závisí na všech $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_s$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dostávám soustavu algebraických rovnic!

podobně jako u implicitního Eulera musím v každém kroku vyřešit soustavu algebraických rovnic (s.d of them)

$\Rightarrow$ implicitní metody mohou mít až dvojnásobný řád oproti explicitním $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ stačí volit větší τ (a tedy méně kroků) pro impl. metody oproti expl. & zachovám „stejnou chybu"