Přednáška 9 - Diferenciální rovnice

Rovnice

- algebraické
  ≡ dáváme do rovnosti algebraické operace $(+,-,:,*,\sqrt[n]{},\dots)$ neznámých

  $$\begin{aligned} 2x+3y &= 5 \\ -x+y &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \log(3x) + \sqrt[2]{x^3} = 8 \quad , \quad \dots$$

- differenciální
  ≡ dáváme do rovnosti algebraické & diferenciální operace $\left(\frac{d}{dx}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}, \dots\right)$.

  Differenciální ⟹ objekty v těchto rovnostech jsou fce

obyčejné → $3t \cdot y(t) + y'(t) = \sin(t) \quad \forall t \in (a,b)$

parciální → $\partial_{xx} u(x,y) + \partial_{yy} u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in (0,1)^2$

stochastické → $dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t$

Proč je potřebujeme?

Pro reálný svět umíme většinou popsat pouze jak se věci mění/vyvíjejí. Změna/Vývoj ≡ derivace

"změnu teploty v čase popisuje fce $f(x,t)$"

$$\iff \frac{d}{dt} u(x,t) = f(x,t)$$

Obyčejné diferenciální rovnice

→ nejmíň použitelné na modelování složitých jevů
→ nejlepší na budování intuice

ODR: • neznáma je funkce jedné proměnné ... $y(t)$

• Harmonický oscilátor
$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos(t)$$
$$y(0) = 1 \quad \& \quad y'(0) = 0$$

• Lotka-Voltera
$$x'(t) = \alpha \cdot x(t) - x(t) \cdot y(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y'(t) = -\gamma y(t) + \delta \cdot x(t) \cdot y(t) \qquad y(0) = y_0$$

• SIR model
$$S(t) = -\beta I(t) S(t) \qquad S(0) = S_0$$
$$I(t) = \beta \cdot I(t) S(t) - \gamma \cdot I(t) \qquad I(0) = I_0$$
$$R(t) = \gamma \cdot I(t) \qquad R(0) = R_0$$

• Lorenzův systém
$$x'(t) = \sigma \cdot (y - x) \qquad x(0) = x_0$$
$$y'(t) = x \cdot (\rho - z) - y \qquad y(0) = y_0$$
$$z'(t) = xy - \beta \cdot z \qquad z(0) = z_0$$

→ stejně jako u algebraických rovnic můžeme mít systémy ODR

Nás zajímá jak řešit systémy ⇒ metody & stabilita (& podmíněnost)

Python demos:

• (ne)stabilita metod expl. & impl. Euler
• podmíněnost ODR

Numerické metody řešení ODR

začneme se skalárním příkladem $y'(t) = f(t, y(t))$

Odvození I „derivace je limita"

$$y'(t) = f(t, y(t)) \iff \lim_{\tau \to 0} \frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} = f(t, y(t)) = \lim_{\tau \to 0} f(t+\tau, y(t+\tau))$$

$\rightsquigarrow$ pro $\tau > 0$ malé aproximuje jako:

- $y(t+\tau) = y(t) + \tau \cdot f(t, y(t))$ .... explicit Euler
- $y(t+\tau) = y(t) + \tau \cdot f(t+\tau, y(t+\tau))$ .... implicit Euler

Odvození II „inverz derivace je integrál"

$$y'(t) = f(t, y(t)) \implies \int_t^{t+\tau} y'(\sigma)\, d\sigma = \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \implies y(t+\tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma$$

Aproximaci integrálů (= kvadraturu) umíme $\implies$

- $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx \approx (\beta - \alpha) \cdot g(\alpha) \rightsquigarrow y(t+\tau) \approx y(t) + \tau f(t, y(t))$ ... expl. Euler
- $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx \approx (\beta - \alpha) \cdot g(\beta) \rightsquigarrow y(t+\tau) \approx y(t) + \tau f(t+\tau, y(t+\tau))$ ... impl. Euler
- $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx \approx (\beta - \alpha)\, g\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) \rightsquigarrow y(t+\tau) \approx y(t) + \tau f\left(t+\frac{\tau}{2}, y\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right) \approx$ aprox. $y\left(t+\frac{\tau}{2}\right)$ pomocí expl. Euler

$$\approx y(t) + \tau f\left(t+\frac{\tau}{2}, y(t) + \frac{\tau}{2} f(t, y(t))\right)$$ .... Rungeho metoda

Odvození III „Taylorův rozvoj"

$$y(t+\tau) = y(t) + y'(t) \cdot (t+\tau-t) + \frac{y^{(2)}(t)}{2}\tau^2 + \frac{y^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + \dots$$

$y'(t) = f(t, y(t))$

$$y^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \cdot y'(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

lze rozvíjet analogicky

- $y(t+\tau) \approx y(t) + \tau \cdot f(t, y(t))$ expl. Euler

$y(t+\tau)$ je explicitní funkce $y(t)$ $\Rightarrow$ tzv. explicitní metody

$y(t+\tau)$ je implicitní funkce $y(t)$,
tj. abychom získali $y(t+\tau)$ na základě $y(t)$ tak musíme vyřešit rovnici (možná nelineární nebo možná soustava rovnic)
$\Rightarrow$ tzv. implicitní metody

Příklad: $y' = -y + \cos(t)$, $y(0) = y_0$

expl. Euler: $y(\tau) \approx y_1 = y_0 + \tau \cdot (y_0 + \cos(0)) = y_0 + \tau \cdot y_0 + \tau$

$$y(2\tau) \approx y_2 = y_1 + \tau\,(y_1 + \cos(\tau))$$

impl. Euler: $y(\tau) \approx y_1$ & $y_1 = y_0 + \tau \cdot (y_1 + \cos(0))$

musíme vyřešit: $y_1 - \tau y_1 = y_0 + \tau$

$$y_1 = \frac{y_0 + \tau}{1 - \tau}$$

$y(2\tau) \approx y_2$ & $y_2 = y_1 + \tau\,(y_2 + \cos(\tau))$

musíme vyřešit: $y_2 = \dfrac{y_1 + \tau \cdot \cos(\tau)}{1 - \tau}$

V praxi implicitní metody vyžadují spuštění nějakého řešiče pro (soustavu) rovnice

$$y_{k+1} = y_k + \tau \cdot f(t_k + \tau, y_{k+1})$$

ale zpravidla jsou výrazně „stabilnější"