Přednáška 5 – podmíněnost & & stabilita

<u>Opáčko:</u> práce s čísly na PC je nepřesná

$\longrightarrow \quad 0.3 = 2.9\ldots 91, \; 1/3, \; \sqrt{2}, \; \pi, \; e, \ldots$

$\Rightarrow$ musíme počítat s chybami $\rightsquigarrow$ minimálně na úrovni ε_{mach}

$\Rightarrow$ klíčová otázka: **Kdy lze vypočteným výsledkům věřit?**

<u>Krok 1:</u> Vlastnost problému – podmíněnost

Řekneme, že problém $\mathcal{P}$: input $\longrightarrow$ output má podmíněnost $\mathcal{K} > 0$, pokud

$$\boxed{\forall \text{input}, \; \forall \varepsilon \text{ (perturbaci)}: \quad \frac{\| \mathcal{P}(\text{input}+\varepsilon) - \mathcal{P}(\text{input}) \|}{\| \mathcal{P}(\text{input}) \|} = \mathcal{K} \cdot \frac{\| \text{input} + \varepsilon - \text{input} \|}{\| \text{input} \|} + o(\|\varepsilon\|)}$$

<u>Slovy:</u> Problém $\mathcal{P}$ má podmíněnost $\mathcal{K}$, pokud pro malé perturbace vstupních dat platí, že výstup se změní nejvýše $\mathcal{K}$-krát více než je velikost perturbace.

<u>Pozorování:</u> definice dost připomíná derivaci a opravdu tam „je":

$$\frac{\| \mathcal{P}(\text{input}+\varepsilon) - \mathcal{P}(\text{input}) \|}{\| \text{input} + \varepsilon - \text{input} \|} = \mathcal{K} \cdot \frac{\| \mathcal{P}(\text{input}) \|}{\| \text{input} \|} + o(\|\varepsilon\|) \quad \overset{\|\varepsilon\| \to 0}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{K} = \| \mathcal{P}'(\text{input}) \| \cdot \frac{\| \mathcal{P}(\text{input}) \|}{\| \text{input} \|}$$

<u>Krok 2:</u> Vlastnost algoritmu – stabilita

Řekneme, že algoritmus $\mathcal{A}$: input $\longrightarrow$ output je stabilní ($\equiv$ zpětně stabilní), pokud

$$\boxed{\exists C > 0 : \forall \text{input} \; \exists \text{input}_{\mathcal{P}} : \quad \bullet \; \mathcal{A}(\text{input}) = \mathcal{P}(\text{input}_{\mathcal{P}}) \; \& \; \bullet \; \frac{\| \text{input}_{\mathcal{P}} - \text{input} \|}{\| \text{input} \|} \le C \cdot \varepsilon_{mach}}$$

<u>Krok 3:</u> Kdy lze výpočtům věřit?

$$\frac{\| \mathcal{P}(\text{input}) - \mathcal{A}(\text{input}) \|}{\| \mathcal{P}(\text{input}) \|} = \frac{\| \mathcal{P}(\text{input}) - \mathcal{P}(\text{input}_{\mathcal{P}}) \|}{\| \mathcal{P}(\text{input}) \|} \le \mathcal{K} \cdot \frac{\| \text{input} - \text{input}_{\mathcal{P}} \|}{\| \text{input} \|} \le C \cdot \mathcal{K} \cdot \varepsilon_{mach}$$

Lze jim věřit pokud $C \cdot \mathcal{K} \ll \varepsilon_{mach}$ $\longrightarrow$ důvěřujeme pouze stabilním algoritmům použitým pro dobře podmíněné problémy

Demo 1: Polynomy v monické bázi & jejich kořeny

Vezmeme si tzv. Wilkinson polynom:

$$p_\delta(x) := (x-1)\cdot\ldots\cdot(x-20) + \delta x^{19} \equiv x^{20} + (\alpha_{19}+\delta)\cdot x^{19} + \alpha_{18}x^{18} + \ldots + \alpha_0$$

s kořeny $r_1 \equiv r_1(\delta), r_2 \equiv r_2(\delta), \ldots, r_{20} \equiv r_{20}(\delta)$ .... přirozeně závisí na δ.

Pro $\delta = 0$: $r_1(0) = 1, \ldots, r_{20} = 20$

Pokud chceme s $p_{\delta=0}(x)$ počítat v PC, je možné, že některé z koeficientů α_i budou nepřesné $\rightarrow$ δ použijeme jako simulaci této nepřesnosti $\leadsto$ místo α_{19} máme $\alpha_{19}+\delta$.

Jak velký vliv má malá nepřesnost (např. $\delta = 10^{-7}$) na $\underbrace{r_1(\delta), \ldots, r_{20}(\delta)}$?

(aka jaká je podmíněnost kořenů $p_{\delta=0}(x)$ vzhledem k δ?) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ „input" je δ & output jsou

$$\frac{|r_i(\delta) - r_i(0)|}{|r_i(0)|} = \kappa_i \delta + o(\delta) \rightarrow \kappa_i \approx |r_i(0)| \cdot \frac{d}{d\delta}\left(r_i(\delta)\Big|_{\delta=0}\right)$$

... zjevně každý kořen $r_i(\delta)$ může být jinak citlivý na změny α_{19} (a všech ostatních α_j).
místo slova podmíněnost (= conditioning) se někdy používá slovo citlivost (sensitivity).

Otázka tedy je jak velká je derivace $\frac{d}{d\delta}\left(r_i(\delta)\Big|_{\delta=0}\right)$ pro $i = 1, \ldots, 20$.

Přesný výpočet nás čeká na cvikách, kde si odvodíme

může být $\ggg 1$

$$\frac{d}{d\delta} r(\delta)\Bigg|_{\delta=0} = \frac{-r_i(0)^{19}}{p_0'(r_i(0))} = -\frac{i^{19}}{\prod_{j\neq i}(i-j)}$$

velmi malá změna δ může výrazně změnit $r_{20}, \ldots, r_{10}$ ... ale nikoliv r_1

Demo 2: polynomiální interpolace

Máme data která chceme interpolovat $\to (x_0,f_0),\dots,(x_n,f_n)$.

Lagrangeova interpolace: $p_f(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot f_i$

Co když jsme při měření udělali chyby a „skutečná" přesná data f_i jsou trochu jiná ... označíme si $(x_0,g_0),\dots,(x_n,g_n)$

přesná Lagrangeova interpolace: $p_g(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot g_i$

chyba pouze v měření $\Rightarrow$ $p_f(x)-p_g(x) = \sum_{0}^{n} l_i(x)\,(f_i-g_i)$

$$\max_{x\in[a,b]} |p_f(x)-p_g(x)| \le \underbrace{\max_{x\in[a,b]} \left|\sum_{0}^{n} l_i(x)\right|}_{=:\Delta_n(x_0,\dots,x_n)} \cdot \max_i |f_i-g_i|$$

lze najít f, g kde platí rovnost

$=: \Delta_n(x_0,\dots,x_n)$ ... tzv. Lebesgueova konstanta

Bez odvození pro $(a,b)\cong(-1,1)$:

$\Delta_n(\text{ekvidistantní}) \approx 2^{n+1}/n\cdot\log(n)\cdot e$

$\Delta_n(\text{Chebyshev.}) \approx \frac{2}{\pi}\log(n+1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\max_{x\in(a,b)}|p_f(x)-p_g(x)|}{\max_{x\in(a,b)}|p_g(x)|} \le \Delta_n(x_0,\dots,x_n)\cdot\frac{\max_i|f_i-g_i|}{\max_i|g_i|}$$

ve skutečnosti sem patří $\max_x |p_g(x)| \ge \max_i |g_i| \to$

$\to$ tohle je jen další odhad

pro Chebyshevovy body

$n \le 20\,000$

$\Delta_n \sim \frac{2}{\pi}\cdot 10 \sim 6.4$

$\leadsto$ dobře podmíněný problém

pro ekvidistantní body

$n \ge 60$

$\Delta_n \ge \frac{1}{60\log(60)}\cdot 10^{16}$

$\leadsto$ špatně podmíněný problém

Demo 3: Lineární soustavy rovnic

problém:
$$\begin{bmatrix} -1/10 & 3/10 & 5/10 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 1/100 & 3/100 & 5/100 - 10^{-13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 9/2 \\ 9/100 - 10^{-13} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ přesný výpočet nám dá $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lingebra 1: Kramerovo pravidlo: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

kde A_i = „vezmu matici A & vyměním i-tý sloupec za $\vec{b}$"

- $\hat{x}_1$ = ... Kramerovo pravidlo na PC = 0.99991905...
- $\hat{x}_2$ = ... Kramerovo pravidlo na PC = 0.99977449...
- $\hat{x}_3$ = ... Kramerovo pravidlo na PC = 1.00009252...

$\Rightarrow$ Kramero pravidlo: $\vec{x}_{KP}$ =

$\rightsquigarrow$ pokud si definujeme $\tilde{b} = A \cdot \vec{x}_{KP} = \begin{bmatrix} 0.69997... \\ 4.4997... \\ 0.089995... \end{bmatrix}$

pak lze Kramerovo pravidlo vnímat jako „přesný řešič" ale pro perturbovaný problém.

Tato perturbace je velikosti $\approx 10^{-4}$

$\rightsquigarrow$ Kramerovo pravidlo bychom nenazvali stabilní.