# Přednáška 3 – interpolace & spliny

mám $(x_i, f_i)$ $i = 0, \dots, n$ kde $x_0, \dots, x_n \in (a,b)$

chci $p_f(x)$ pro $x \in (a,b)$

Lagrangeova interpolace:

- $l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
- $p_f(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$ $(*)$

## Teorie – odhad chyby

Nechť $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \leq \dots \leq x_n \in (a,b)$. Mějme $f_i := f(x_i)$ a $p_f(x)$ jako v $(*)$.

Pak $\forall x \in (a,b)\ \exists \xi \in (a,b)$ t.ž.

$$(**) \quad f(x) - p_f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

a tedy

$$\max_{x \in (a,b)} |f(x) - p_f(x)| \leq \frac{\max_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)|$$

Důkaz $\to$ vynecháme, pro nás nepřináší „hlubší vhled"

V $(**)$ je rovnost $\leadsto$ lze odvodit/pochopit Rungeho jev z minule?

$\to$ spočítáme derivace: $f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f^{(2)} = \dots$, $f^{(7)} = \underbrace{-40320 \cdot \frac{x(x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 1)}{(1+x^2)^8}}_{|\cdot| \leq 4392}$

$\forall x \in [-6, 6]$

& nabývá se pro $x^* \approx 0.14$

$\Rightarrow$ chyba $\sim \frac{4392}{7!} \cdot \underbrace{3424}_{(x^* - x_0) \cdot \ldots \cdot (x^* - x_n)} \sim 2984 \gg 0$

- téměř v žádné aplikaci nelze změnit/ovlivnit $\underline{f}$ $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ člen $\max_{\xi \in (a,b)} |f^{(n+1)}(\xi)|$ je mimo náš dosah

- člen $1/(n+1)!$ je fajn, ten nám pomáhá & ukazuje, že „chyba aproximace může klesat až exponenciálně" $\left(\lim \frac{2^n}{n!} = 0\right)$

- člen $|(x-x_0)\cdot \ldots \cdot (x-x_n)|$ je někdy pod naší kontrolou $\to$
  $\to$ u některých aplikací si můžeme vybrat body měření/pozorování
  $\Rightarrow$ lze mít $x_0, \ldots, x_n \in (a,b)$ t.ž. minimalizují tento člen?

$\rightsquigarrow$ ano! tzv. Chebyshevovy body
  - složité na definici $\to$ kořeny tzv. Chebyshevových polynomů
  - „husté u krajů, řídké uprostřed" (předmět Teorie aproximace)

Věta: Mějme $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ a $p_f(x)$ odpovídající Lagrange interpolaci v Cheb. bodech.
Pak $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_f(x)| \xrightarrow{\deg(p_f) \to +\infty} 0$.

# Python demos

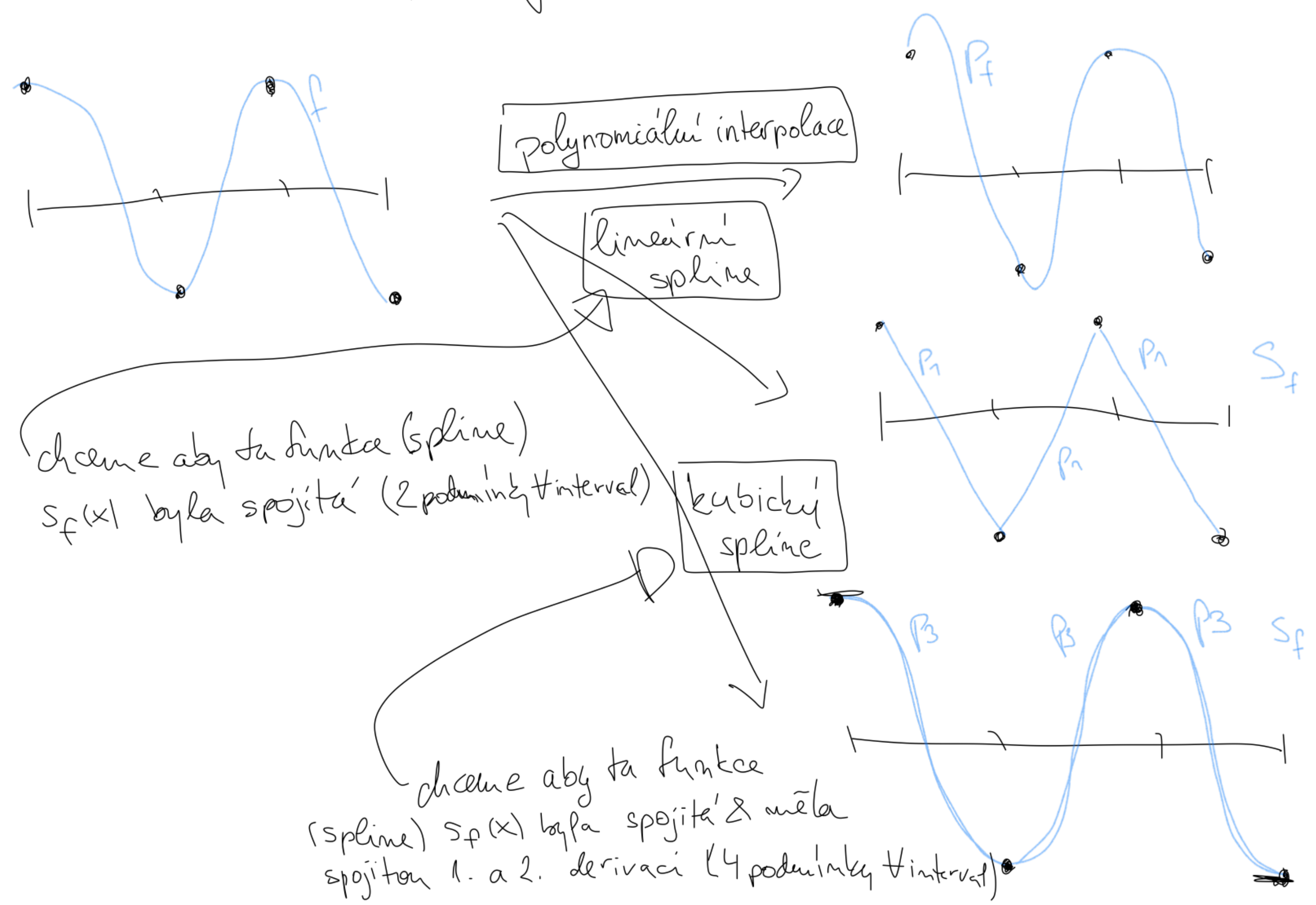
- Vandermonde & jeho nepoužitelnost
- Lagrange
  - chyba se vyvíjí dle odhadu (*) $(\cos(x))$
  - chyba se chová úplně jinak & roste $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ (lze spočítat derivaci $\rightsquigarrow$ moc velká)
    - proč? Lze spravit Cheb. body?
- vzorce ekvivalentní s papírem & tužkou (Vandermond & & Lagrange) se nechovají stejně v PC $\rightsquigarrow$ proč?
- Chyba interpolace neklesá pod $10^{-16}$ $\to$ proč?

$\longrightarrow$ tomu je třeba porozumět $\rightsquigarrow$ příští týden

Dneska skončíme tím, že si všimneme, že ty problémy se objevují pro velké $n$.

$\Rightarrow$ co kdybychom měli $n$ „malé ale hodněkrát"? (≡ rozděl a panuj)

$\rightsquigarrow$ tzv. spliny, tj. funkce po částech polynomiální:




chceme aby ta funkce (spline) $s_f(x)$ byla spojitá (2 podmínky $\forall$ interval)

chceme aby ta funkce (spline) $s_f(x)$ byla spojitá & měla spojitou 1. a 2. derivaci (4 podmínky $\forall$ interval)

**Věta**: Mějme $(a,b) \subset \mathbb{R}$, dělení $x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ \dots,\ x_k=b=a+kh$

- $f\in \mathcal{C}^2$ & $s_f$ je lineární spline $\Rightarrow$ $|f(x)-s_f(x)| \le \frac{1}{8}h^2 \cdot \max\limits_{\xi\in(a,b)} |f^{(2)}(\xi)|$
- $f\in \mathcal{C}^4$ & $s_f$ je kubický spline $\Rightarrow$ $|f^{(j)}(x)-s_f^{(j)}(x)| \le \frac{3}{8}h^{4-j} \cdot \max\limits_{\xi\in(a,b)} |f^{(4)}(\xi)|$

Python demo ve 2D $\to$ „spliny v trojúhelnících"

$\to$ reálně používané