Přednáška 15 – Lineární algebraické rovnice

- minulou přednášku jsme věnovali odvození/motivaci „kdy/proč" potřebujeme vyřešit problémy typu $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

<u>Lingebra 1</u>: A je čtvercová & regulární $\Longrightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R}^n$: $A\vec{x} = \vec{b}$

Metody k nalezení $\vec{x}$:

- <u>přímé</u> – založené na Gaussově eliminaci a LU (Choleského) rozkladu
  - řešení $\vec{x}$ (tj. jeho spočtenou aproximaci) získám až na konci výpočtu
  - není lehké si volit přesnost řešení
  - vyžaduje přístup k (skoro) celé matici A
- <u>iterační</u> – různé přístupy ke generování stále se zlepšujících aproximací (podobně jako „Newtonovy metody")
  - ne vždy je třeba mít přístup k A → někdy stačí jen k $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ nebo ke specifickým částem/transf. matice A
  - snadnější volit přesnost řešení
  - menší záruky na výpočetní čas
  - možná závislost rychlosti konvergence na konkrétní pravé straně $\vec{b}$

Přímé řešiče – Gaussova eliminace & LU

Gaussova eliminace: známe z lingebry, ale už jsme to rok neviděli...

<u>idea</u>: vyřešit soustavu rovnic
$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
je „lehké"

vyřešit soustavu rovnic
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
je „těžké"

⇝ převedeme to těžké na to lehké

<u>značení</u>: matice A, neznámý vektor $\vec{x}$, vektor pravé strany $\vec{b}$

řádky & sloupce A budeme značit „pythonovsky/matlabově",

tj. 1. řádek $A \equiv A_{1,:}$ .... i-tý řádek $\equiv A_{i,:}$

5. sloupec $A \equiv A_{:,5}$ .... j-tý sloupec $\equiv A_{:,j}$

Př. 1: Vandermondova matice ⇝ interpolace hodnot $\{1,-1,1\}$ v bodech $\{1,2,3\}$ odpovídá řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow A \vec{x} = \vec{b}$$

1. krok Gaussovy eliminace

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow A^{(1)} \vec{x} = \vec{b}^{(1)}$$

2. krok Gaussovy eliminace

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow A^{(2)} \vec{x} = \vec{b}^{(2)}$$

1. Krok:

$$A^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M^{(1)}} \cdot A \quad \cdots \quad \begin{aligned} A^{(1)}_{1,:} &= 1 \cdot A_{1,:} + 0 \cdot A_{2,:} + 0 \cdot A_{3,:} \\ A^{(1)}_{2,:} &= (-1) \cdot A_{1,:} + 1 \cdot A_{2,:} + 0 \cdot A_{3,:} \\ A^{(1)}_{3,:} &= (-1) \cdot A_{1,:} + 0 \cdot A_{2,:} + 1 \cdot A_{3,:} \end{aligned}$$

⟹ 1. krok je plně vyjádřen maticí $M^{(1)}$

Pozorování: pro obecnou matici $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ bychom měli $A^{(1)} = M^{(1)} \cdot A$

kde
$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31}/a_{11} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1}/a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{21}/a_{11} \\ a_{31}/a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1}/a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_{11}} A_{2:n,1} \end{bmatrix} \cdot \vec{e}_1$$

2. Krok:

$$A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{M^{(2)}} A \quad \cdots \quad \begin{aligned} A^{(2)}_{1,:} &= 1 \cdot A^{(1)}_{1,:} + 0 \cdot A^{(1)}_{2,:} + 0 \cdot A^{(1)}_{3,:} \\ A^{(2)}_{2,:} &= 0 \cdot A^{(1)}_{1,:} + 1 \cdot A^{(1)}_{2,:} + 0 \cdot A^{(1)}_{3,:} \\ A^{(2)}_{3,:} &= 0 \cdot A^{(1)}_{1,:} + (2) \cdot A^{(1)}_{2,:} + 1 \cdot A^{(1)}_{3,:} \end{aligned} \quad \cdots$$

a tedy $A^{(2)} = M^{(2)} \cdot M^{(1)} \cdot A$

⟹ 2. krok je plně vyjádřen maticí $M^{(2)}$

Pozorování: pro obecnou matici $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ bychom měli $A^{(2)} = M^{(2)} \cdot A^{(1)} = M^{(2)} \cdot M^{(1)} \cdot A$

kde
$$M^{(2)} = I - \frac{1}{a^{(1)}_{11}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a^{(1)}_{31} \\ \vdots \\ a^{(1)}_{n1} \end{bmatrix} \cdot e_2^T = I - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a^{(1)}_{11}} A^{(1)}_{3:n,1} \end{bmatrix} \cdot \vec{e}_2$$

V našem případě jsme po 2 krocích hotovi, tj. místo těžkého systému $A\vec{x} = \vec{b}$ máme ekvivalentní lehký systém $A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)}$, kde $A^{(2)}$ je horní trojúhelníková.

Pro obecnou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ skončíme až v $(n-1)$-tém kroku a budeme mít $A^{(n-1)}$ horní trojúhelníkovou & $A^{(n-1)} = M^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot M^{(1)} \cdot A$, kde $M^{(k)} = I - \vec{m}^{(k)} \cdot \vec{e}_k^T$ & $m^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot \left[0 \cdots 0\ a_{k+1,k}^{(k-1)}\ a_{k+2,k}^{(k-1)} \cdots a_{n,k}^{(k-1)}\right]^T$.

Označíme si $A^{(n-1)} \equiv U$ (anglicky upper-triangular) $\rightarrow$ pak

$$U = \underbrace{M^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot M^{(1)}}_{=:M} \cdot A \quad , \text{ a tedy } \quad A = \left(M^{(1)}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(M^{(n-1)}\right)^{-1} \cdot U$$

Zároveň $\left(M^{(k)}\right)^{-1} = \left(I - \vec{m}^{(k)} \cdot \vec{e}_k^T\right)^{-1} = I + \vec{m}^{(k)} \cdot \vec{e}_k^T =: L_k$ (anglicky lower-triangular)

.... $\forall k$: L_k je dolní trojúhelníková

Tedy

$$A = \underbrace{L_1 \cdot \ldots \cdot L_{n-1}}_{=:L\ (\equiv M^{-1})} \cdot U \quad , \text{ tj. } \quad A = LU$$

$\rightarrow$ tzv. LU-rozklad (LU-faktorizace) matice A.

Gaussova eliminace pro $Ax = b$ pak odpovídá:

- $Ax = b \xrightarrow{G.E.} Ux = L^{-1}b$ .... ale bez explicitního sestavení L
- vyřešíme $Ux = L^{-1}b$ (trojúhelníková matice $\Rightarrow$ lehké)

LU-řešič pro $Ax = b$ odpovídá:

- spočteme L, U t., že $A = L \cdot U$ jako výše
- spočteme $y = L^{-1}b$ .... tj. vyřešíme soustavu $Ly = b$ (trojúhelníková matice $\Rightarrow$ lehké)
- vyřešíme $Ux = y$ (trojúhelníková matice $\Rightarrow$ lehké)

- poznámka: výpočet LU-faktorizace probíhá stejně jako Gaussova eliminace výše, pouze si budeme ukládat i ty vektory $\vec{m}^{(k)}$, které definují $M^{(k)}$. Máme totiž:

$$L = L_1 \cdot \ldots \cdot L_{n-1} = \left(I + \vec{m}^{(1)} \vec{e}_1^T\right) \cdot \left(I + \vec{m}^{(2)} \cdot \vec{e}_2^T\right) \cdot \ldots \cdot \left(I + \vec{m}^{(n-1)} \cdot \vec{e}_{n-1}^T\right)$$

$$= I + \vec{m}^{(1)} e_1^T + \vec{m}^{(2)} \cdot \vec{e}_2^T + \ldots + \underbrace{\vec{m}^{(n-1)}}_{\in \mathbb{R}^1} \cdot \vec{e}_{n-1}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ | & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vec{m}^{(1)} & \vec{m}^{(2)} & \ddots & 1 & 0 \\ | & | & \cdots & \vec{m}^{(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$