Přednáška 14 – lineární soustavy rovnic

Motivace

- normální rozdělení více proměnných: $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ $\Rightarrow E(\vec{X}) = \mu$ & $\Rightarrow cov(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$

$\to \Sigma$ SPD (symetrická, pozitivně-definitní) $\Rightarrow$ hustota rozdělení je $\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\cdot(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}}{(2\pi)^n \cdot \det(\Sigma)}$

výpočet $z := \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})$ odpovídá řešení soustavy $\Sigma z = x - \mu$

- systémy ODR: nepodmíněně stabilní metody $\equiv$ každý časový krok vyžaduje řešení soustavy alg. rovnic
- nelineární soustavy alg. rovnic:

  1 krok Newtonovy metody $\equiv$ 1 soust. lin. alg. ric

- parciální diferenciální rovnice:

  $\to$ vedení tepla, proudění tekutin, šíření vln (zvuk, elektromagnetismus, ...), ...

  $\to$ vývoj ceny „options":

  - t ... čas
  - $S(t)$ ... cena konkrétní komodity (stock)
  - r .... bez-riziková úroková míra (risk-free)
  - $V(t,S)$ .... cena (value) „option" založené na $S(t)$
  - σ ... volatilita komodity $S(t)$

pak Black-Scholes model (jeden z nejpoužívanějších modelů v praxi):

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t,S(t)) + \frac{(\sigma \cdot S(t))^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S^2} V(t,S(t)) = r \cdot V(t) - r \cdot S(t) \cdot \frac{\partial}{\partial S} V(t,S(t)) \quad \& \quad \text{BC} + \text{IC}$$

(BC … boundary conditions, IC … initial conditions)

Po vhodné transformaci proměnných dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = 0 \qquad x \in (0,L), \quad t \in (0,T)$$

x ... transformované $S(t)$, tj. transf. cena komodity ... $x = \ln(S/K) + (T-t)\cdot(r - \frac{\sigma^2}{2})$ ...... $K = K(S)$ je „výplata" option na základě ceny komodity

$u(t,x)$ .... transformované $V(t,S)$, tj. transf. cena „option" .... $u(t,x) = V(t,S) \cdot e^{r\cdot(T-t)}$

My si tento model zjednodušíme (nerealistický) a položíme $r = \frac{\sigma^2}{2} = \alpha$ a dostaneme:

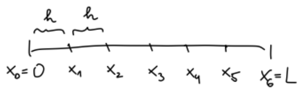
$$(*) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \\ u(0,x) = u^0(x) \quad \text{počáteční podmínka} \\ u(t,0) = g_0(t) \ \& \ u(t,L) = g_L(t) \quad \text{okrajová podmínka} \end{cases}$$

------ shodou okolností tahle rovnice se také používá k modelování spousty jiných fenoménů

Jak získat (aproximaci) $u(x,t)$?

Podobně jako u ODR se spokojíme s aproximací $u(\cdot,\cdot)$ v jistých bodech. Konkrétně, v bodech $x_i \in (0,L)$ rovnoměrně pokrývajících $(0,L)$, tj.

$$x_i = i \cdot h \quad \ldots$$



a v každém bodě x_i budeme aproximovat řešení $u(t,x_i)$ pomocí funkce $u_i(t)$.

Krok 1: aproximujeme pravou stranu

- $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{\partial/\partial x\, u(t,x_{i+1}) - \partial/\partial x\, u(t,x_i)}{h}$$
$$\approx \frac{\partial/\partial x\, u(t,x_{i+1}) - \partial/\partial x\, u(t,x_i)}{h}$$
$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{u(t,x_{i+1}) - u(t,x_i)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{u(t,x_i) - u(t,x_{i-1})}{h}}{h}$$
$$\approx \frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{h^2}$$

aproximace derivace pomocí diference
⇝ tzv. METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ

v našem set-up lze jednoduše pomocí Taylorova rozvoje odvodit, že

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x_i) = \frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$\Longrightarrow$ pravá strana může být aproximována lineární rekurencí s chybou (tzv. diskretizační chyba) řádu $\mathcal{O}(h^2)$

Krok 2: ODR zápis

→ teď aproximujeme (*) systémem ODR pro funkce $u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)$:

$$(**)\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(u_2(t) - 2u_1(t) + u_0(t)\right) \\ u_2'(t) = \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(u_3(t) - 2u_2(t) + u_1(t)\right) \\ \vdots \\ u_{n-2}'(t) = \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(u_{n-1}(t) - 2u_{n-2}(t) + u_{n-3}(t)\right) \\ u_{n-1}'(t) = \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(u_n(t) - 2u_{n-1}(t) + u_{n-2}(t)\right) \end{cases}$$

to by měla být funkce aproximující $u(t,0)$ → → tu známe z okrajové podmínky → $u_0(t) \equiv g_0(t)$

$\&\ u_i(0) = u^0(x_i)$

to by měla být funkce aproximující $u(t,L)$ → → tu známe z okrajové podmínky → $u_n(t) \equiv g_L(t)$

→ vektorový zápis:

$$\vec{u}(t) \equiv \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad L := \frac{\sigma^2}{2h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{g}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2h^2} g_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\sigma^2}{2h^2} g_L(t) \end{bmatrix}$$

$$(**) \iff \boxed{\begin{aligned} \vec{u}'(t) &= L \cdot u(t) + \vec{g}(t) \\ \vec{u}(0) &= \left[u^0(x_0), \dots, u^0(x_n)\right]^T \end{aligned}}$$

Krok 3: chci předpovědět vývoj ceny → použijeme impl. Euler

⇒ • $\vec{u}(\tau) \approx \vec{u}_1$ & $\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \tau\cdot\left(L\vec{u}_1 + \vec{g}(\tau)\right) \iff$

$\iff \underbrace{(I - \tau L)}_{\text{matice}}\vec{u}_1 = \underbrace{\vec{u}_0 + \tau\vec{g}(\tau)}_{\text{pravá strana}}$ …… systém lineárních alg. rovnic

• $\vec{u}(2\tau) \approx \vec{u}_2$ & $\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \tau\left(L\vec{u}_2 + \vec{g}(\tau)\right) \iff$

$\iff \underbrace{(I - \tau L)}_{\text{matice}}\vec{u}_2 = \underbrace{\vec{u}_1 + \tau\vec{g}(2\tau)}_{\text{pravá strana}}$ …. systém lineárních alg. rovnic

• $\vec{u}(3\tau) \approx \vec{u}_3$ & $\underbrace{(I - \tau L)}_{\text{matice}}\vec{u}_3 = \underbrace{\vec{u}_2 + \tau\vec{g}(3\tau)}_{\text{pravá strana}}$

⋮

⤳ dostaneme aproximaci cen v závislosti na čase & hodnotě komodity S

Krok 4: v některých aplikacích mi stačí spočítat (≡ aproximovat) tzv. „steady state" – tj. ekvilibrium, ke kterému $\vec{u}(t)$ směřuje ⇝ tj. stav ve kterém, už se $\vec{u}(t)$ s časem nemění.

$\vec{u}(t)$ se s časem nemění $\iff \frac{\partial}{\partial t}\vec{u} = 0 \iff$

$$\iff \underbrace{-L}_{\text{matice}}\vec{u}(t) = \underbrace{\vec{g}(t)}_{\text{pravá strana}}$$