Přednáška 12 – algebraické rovnice

→ viděli jsme, že implicitní R-K metody potřebují řešit soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t+c_1\tau,\, y(t)+\tau \sum_{1}^{s} a_{1j} k_j) \\ \vdots \\ f(t+c_s\tau,\, y(t)+\tau \sum_{1}^{s} a_{sj} k_j) \end{bmatrix} \leftrightarrow \vec{k} = G(\vec{k}) \leftrightarrow F(\vec{k}) = \vec{b}$$

„pravá strana nezávislá na $\vec{k}$"

.... tzv. soustava algebraických rovnic.

F je nelineární (tj. neplatí, že $F(\alpha v+\beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w)$)

$\Rightarrow$ nelineární alg. rce

F je lineární (tj. $\forall \alpha,\beta\, \forall v,w: F(\alpha v+\beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w)$)

$\Rightarrow$ lineární alg. rce

Např.:

lineární: $ax - b = 0$ ... nebo systém $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

⇝ pro známé a_{ij} & b_i

nelineární: $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 4x = 12$ nebo systém $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - 5 + x_2 \\ \sin(x_1 \cdot x_2) \\ x_1^3 - e^{x_3} \end{bmatrix}$

Jaké systémy rovnic „víme" jak řešit?

- lineární ⇝ viz Lingebra I – víme co & jak dělat
- polynomiální → v $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ zvládneme kvadratické a kubické
- Abel-Galois: neexistuje explicitní formulka pro kořeny polynomů stupně ≥ 5 „v radikálech".
- Umemura: $\forall$ polynom $\exists$ expl. vyjádření kořenů skrze funkce nekonečných řad maticových exponenciál
- obecné: formule co existují „skoro nikdy nejsou použitelné"

Co s tím? aproximujeme náš systém „lineárním" a vyřešíme ten lineární

Dobrá idea, ale lineární aproximace (tj. aprox. funkce pomocí přímky) je většinou dost nepřesná. Např. u Taylora víme, že je přesná jen lokálně.

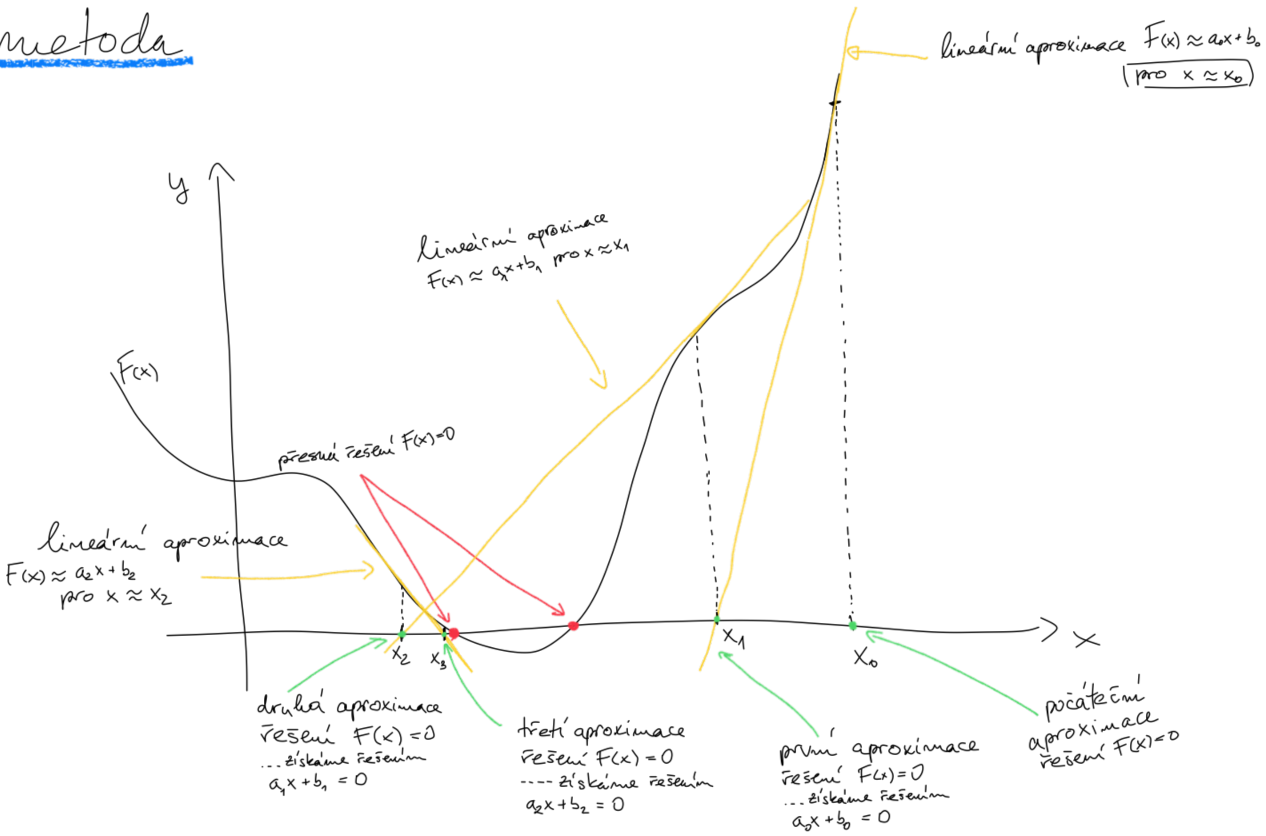
Tudíž nelze očekávat, že takto získaná aproximace je dobrá/přesná, pokud jsem tu nelineární rovnici neaproximoval „náhodou" už blízko přesného řešení $F(x) = 0$.

$\Rightarrow$ idea č. 2: budeme postupovat iterativně.

tj. aproximuju $F(\cdot)$ okolo nějakého bodu x_0 jako $a_0 \cdot x + b_0$ ($\equiv$ lineární aprox.) a najdu aprox. kořene $F(\cdot)$ jako $x_1 := \frac{-b_0}{a_0}$. Pak aproximuju $F(\cdot)$ okolo x_1 jako $a_1 x + b_1$ a najdu 2. aprox. kořene $F(\cdot)$ jako $x_2 := \frac{-b_1}{a_1}$. A takhle pokračujeme.

Newtonova metoda

obrázek 8
& postup
pro algebr.
rovnici pro
jednu proměnnou
$F(x) = 0$



$\rightsquigarrow$ $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ konvergují k jednomu z řešení $F(x) = 0$

Matematické odvození obrázku výše:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_0) + \left(\frac{d}{d\vec{x}}F\right)(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) + \mathcal{O}\left(\|\vec{x}_0-\vec{x}\|^2\right)_{x\to x_0}$$ ---- Taylorův rozvoj

$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ & $F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_d(\vec{x}) \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\left(\frac{d}{d\vec{x}}F\right)(\vec{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(\vec{x}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_d}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_d}{\partial x_d}(\vec{x}) \end{bmatrix}}_{=: J(\vec{x}) \equiv J_x}$ .... „Jacobian mtrx of F"

Jakobiánská matice F

$\Rightarrow$ místo $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ budeme řešit:

$$\vec{F}(\vec{x}_0) + J_{x_0}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) = 0 \iff J_{x_0}\vec{x} = J_{x_0}\vec{x}_0 - \vec{F}(\vec{x}_0) \iff$$

$$\iff \boxed{J_{x_0}\vec{x} = \vec{b}_0} \iff \boxed{\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{v} \quad \& \quad \vec{v} \text{ je řešení } J_{x_0}\vec{v} = -\vec{F}(\vec{x}_0)}$$

soustava lineárních rovnic $\rightsquigarrow$ řešení označíme jako $\vec{x}_1$

další aproximace je update předchozí ve směru „$J_{x_k}^{-1}\vec{F}(\vec{x}_k)$"

- $\vec{x}_2$ vezmeme jako řešení soustavy $J_{x_1}\vec{x} = \vec{b}_1 \iff \boxed{\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{v} \quad \& \quad \vec{v} \text{ je řešení } J_{x_1}\vec{v} = -\vec{F}(\vec{x}_1)}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{x}_{k+1} := \vec{x}_k + \vec{v} \quad \text{kde } \vec{v} \text{ je řešení } J_{x_k}\vec{v} = -\vec{F}(\vec{x}_k)}$$

.... nebo-li $J_{x_k}\vec{x}_{k+1} = J_{x_k}\vec{x}_k - \vec{F}(\vec{x}_k)$

Jak analyzovat konvergenci?

mějme kořen $\vec{x}^*$, tj. $\vec{F}(x^*) = 0$. Pak v <u>k</u>-tém kroku Newtonovy metody platí:

z definice $\vec{x}_{k+1}$: $J_{x_k}\vec{x}_{k+1} - J_{x_k}\vec{x}_k = -\vec{F}(\vec{x}_k) \iff \vec{x}_k - \vec{x}_{k+1} = J_{x_k}^{-1}\vec{F}(\vec{x}_k)$

$$0 = F(\vec{x}^*) \overset{\text{Taylor}}{=} F(\vec{x}_k) + J_{x_k}(\vec{x}_k - \vec{x}^*) + \mathcal{O}\left(\|x^*-x_k\|^2\right)_{x_{k-1}} \iff \vec{x}_k - \vec{x}^* = J_{x_k}^{-1}\cdot F(\vec{x}_k) + \mathcal{O}\left(\|x^*-x_k\|^2\right)$$

$$\iff \vec{x}_k - \vec{x}^* = \vec{x}_k - \vec{x}_{k+1} + \mathcal{O}\left(\|x^*-x_k\|^2\right)$$

$$\iff \|x^* - x_{k+1}\| = \mathcal{O}\left(\|x^*-x_k\|^2\right)_{x_k \to x^*}$$

$$\iff \exists C \neq 0: \lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^*-x_{k+1}\|}{\|x^*-x_k\|^2} = C$$

$\rightsquigarrow$ tzv. kvadratická konvergence

$\longrightarrow$ 1 iterace zmenší chybu kvadraticky (např. $0.1 \to 0.01 \to 0.0001 \to 10^{-8} \to 10^{-16}$)

Kdy to může selhat?

- když J_{x_k} je singulární $\rightsquigarrow$ pak x_{k+1} nemusí existovat
- může se stát, že dostaneme posloupnost $x_0, x_1, x_2, \ldots$ která nekonverguje

Praxe:

jak získat J_{x_k}?

jak vyřešit ten lineární systém $J_{x_k}x = b_k$?

co když nekonvergujeme?