Je toto všechno nebo mají implicitní metody i jiné výhody?
Všechno to není → podíváme se na „stabilitu"

Absolutní stabilita metod pro ODR (A-stabilita)

Stabilita metod pro ODR je „bohužel" matoucí pojem, který neodpovídá přímo definici stability z našeho kurzu →

→ nejde v principu o studium interakce zaokrouhlovacích a jiných softwarových chyb a konkrétní metody

→ jde o kvalitativní vlastnosti aproximace a jestli tyto vlastnosti odpovídají vlastnostem přesného řešení.

→ definuje se na základě tzv. testovací rovnice (aka Dahlquistova rovnice): $\left[\begin{array}{c} y'(t) = \lambda \cdot y(t) \\ \& \\ y(0) = 1 \end{array}\right]$

Řešení testovací rovnice: $y(t) = e^{\lambda t}$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$

→ bude nás zajímat kvalitativní chování našeho řešení pro různá $\lambda \in \mathbb{C}$ (na přednášce jsme si načrtnuli čemu to odpovídá)

opáčko $\mathbb{C}$: pro libovolné $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$: $\cdot\ \exists\, r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$: $\alpha + i\beta = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

$\cdot\ (\alpha + i\beta)^n = \underbrace{r^n}_{= |\alpha + i\beta|^n > 0} \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta))$

- $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) > 0}$ ⇒ $|y(t)| = |e^{\lambda t}| \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$ ... řešení exploduje
- $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) = 0}$ ⇒ $|y(t)| = |y(0)| = 1$ ... řešení nemění velikost
- $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) < 0}$ ⇒ $|y(t)| = |e^{\lambda t}| \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ ... řešení konverguje k 0

Explicitní Euler

$y_1 = y_0 + \tau \cdot f(y_0,t_0) \equiv y_0 + \tau \cdot \lambda \cdot y_0 = (1+\tau\lambda)y_0$

$\Rightarrow y_{n+1} = (1+\tau\lambda)y_n = \dots = (1+\tau\lambda)^n y_0$

$\Downarrow$

- $\boxed{|1+\tau\lambda| > 1} \Rightarrow |y_n| \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$
- $\boxed{|1+\tau\lambda| = 1} \Rightarrow |y_n| = |y_0|$
- $\boxed{|1+\tau\lambda| < 1} \Rightarrow |y_n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Implicitní Euler

$y_1 = y_0 + \tau \cdot f(y_1,t_1) \equiv y_0 + \tau\lambda y_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = 1/(1-\tau\lambda) \cdot y_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{n+1} = 1/(1-\tau\lambda)^n \cdot y_0$

$\Downarrow$

- $\boxed{|1-\tau\lambda| < 1} \Rightarrow |y_n| \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$
- $\boxed{|1-\tau\lambda| = 1} \Rightarrow |y_n| = |y_0|$
- $\boxed{|1-\tau\lambda| > 1} \Rightarrow |y_n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

V ideálním světě bychom rádi aby $\Rightarrow$, $\Rightarrow$, $\Rightarrow$ tj. aby numerické metody produkovaly aproximace, které se chovají „automaticky kvalitativně správně"

Explicitní Euler:

- $\boxed{Re(\lambda) > 0} \Rightarrow \boxed{|1+\tau\lambda| > 1}$ ✓
- $\boxed{Re(\lambda) = 0} \not\Rightarrow \boxed{|1+\tau\lambda| = 1}$ ✗
- $\boxed{Re(\lambda) < 0} \not\Rightarrow \boxed{|1+\tau\lambda| < 1}$ ✗

Implicitní Euler:

- $\boxed{Re(\lambda) > 0} \not\Rightarrow \boxed{|1-\tau\lambda| > 1}$ ✗
- $\boxed{Re(\lambda) = 0} \not\Rightarrow \boxed{|1-\tau\lambda| = 1}$ ✗
- $\boxed{Re(\lambda) < 0} \Rightarrow \boxed{|1-\tau\lambda| < 1}$ ✓

- $\Rightarrow$ ... právě tehdy když $\lambda = 0$, nikoliv obecně ⇝ takže „✗" ... nezávisle na τ
- expl $\not\Rightarrow$, impl $\not\Rightarrow$ tady musíme počítat: $\lambda = Re(\lambda) + i \cdot Im(\lambda) =: \alpha + i\beta$ & $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda}$

  $1+\tau\lambda = 1+\tau\alpha + i\tau\beta \Rightarrow |1\pm\tau\lambda|^2 = (1\pm\tau\alpha \pm i\tau\beta)(1\pm\tau\alpha \mp i\tau\beta) = \dots = 1+\tau^2(\alpha^2+\beta^2) \pm 2\tau\alpha$

  Tedy pro libovolné $\lambda = \alpha + i\beta$ existuje $\tau_0 > 0 : \forall \tau < \tau_0$ „expl $\not\Rightarrow$, impl $\not\Rightarrow$ "

  $\Rightarrow$ „✗" jsou jen „podmíněné" $\to$ za určitých podmínek na τ (velikost kroku metody) se „✗" změní na „✓"

V praxi většinou popisujeme & pracujeme s modely reálného světa a „reálný svět většinou neexploduje"

$\Rightarrow$ historicky & prakticky se tedy více studují problémy odpovídající „$Re(\lambda) \leq 0$" a tedy se ustálilo metodám, pro které $\Rightarrow$ říkat „A-stabilní" (A = absolute)

Říkáme tedy, že
- explicitní Euler je podmíněně A-stabilní (= za určitých podmínek na τ)
- implicitní Euler je nepodmíněně A-stabilní (= bez podmínek na τ)

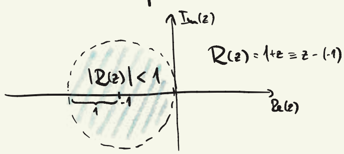
Zobecnění definice pro další jednokrokové metody:

Krok 1: pro moji konkrétní metodu najdu funkci $R(\cdot)$ takovou, že pro tu testovací rovnici platí $y_{n+1} = y_n \cdot R(\tau\cdot\lambda)$
$= y_0 \cdot (R(\tau\lambda))^n$

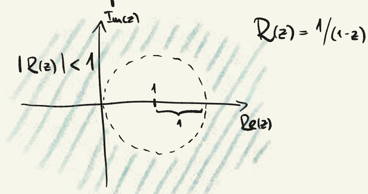
Pro expl. Eulera: $R(\tau\lambda) = 1 + \tau\lambda$
impl. Eulera: $R(\tau\lambda) = 1/(1-\tau\lambda)$ → obecně musím vyjádřit

Krok 2: definuju oblast stability $\mathcal{Y} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1 \}$
⤳ tedy pokud $\tau\lambda \in \mathcal{Y}$, pak je posloupnost $\{|y_n|\}_n$ omezená

expl. Euler:



impl. Euler:



Krok 3: Řekneme, že metoda je A-stabilní, pokud $\mathbb{C}^- \subseteq \mathcal{Y}$
$\mathbb{C}^- := \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \leq 0 \}$

Věta: Explicitní metody typu Runge-Kutta nemohou být A-stabilní.

⤳ tedy vidíme, že „explicitní vs. implicitní" má ještě další „dimenzi" → explicitní metody nemohou být A-stabilní a tedy pokud nevolíme náš krok τ dostatečně malý, může se stát, že $\tau\cdot\lambda \notin \mathcal{Y}$ pro $Re(\lambda) < 0$ & a naše numerické řešení může oscilovat a růst nade všechny meze (zatímco přesné řešení zůstává omezené)