Přednáška 11 – Runge-Kutta & stabilita

opáčko:

- implicit./explicit. Euler & jejich chyba
- použití kvadratur na odvození Runge-Kutta metod

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau \sum_{i=1}^{s} k_i \cdot b_i$$

$$k_1 = f(t, y(t)) \qquad \approx y'(t)$$

$$k_2 = f(t + c_2\tau, y(t) + \tau \cdot a_{2,1} \cdot k_1) \qquad \approx y'(t + c_1\tau)$$

$$\vdots$$

$$k_s = f\left(t + c_s\tau, y(t) + \tau \sum_{1}^{s-1} a_{s,j} \cdot k_j\right) \approx y'(t + c_s\tau)$$

tzv. s-stupňové (s-stage) explicitní RK metody.

Lze ukázat, že pro $f(t,y)$ dostatečně hladké platí

- $|y(t+\tau) - y^{RK}(t+\tau)| = \mathcal{O}(\tau^{p+1})_{\tau \to 0}$
- $\max\limits_{n=1,\dots,N} |y(t_0+n\tau) - y^{RK}(t_0+n\tau)| = \mathcal{O}(\tau^{p})_{\tau \to 0}$

pro nějaké $p \in \mathbb{N}$, $p \le s$, kde

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y(t_0) = y_0$$

& funkce $y^{RK}(t+n\tau)$ odpovídá nějaké konkrétní explicitní Runge-Kutta metodě s nejvýše $\underline{s}$ stupni ($\underline{s}$-stages) kde jsme začali s $y^{RK}(t_0) = y_0$

Nebo-li explicitní $\underline{s}$-stage RK metody jsou řádu nejvýše $p \le s$.

Python demo: „(ne)stabilita" expl. RK

→ pro některé (systémy) ODR numerické řešení osciluje - speciálně pokud nemáme dostatečně malý krok τ. Proč?

Zjednodušený model - tzv. Dahlquistova rovnice
(aka test equation)

$y'(t) = \lambda y(t)$ → řešení $y(t) = e^{\lambda t}$

asi nejjednodušší „netriviální" ODR

- explicit. Euler: $y(t+\tau) \approx y(t) + \tau \cdot \lambda \cdot y(t) = (1+\tau\lambda) \cdot y(t)$

  ⇝ $y(t+n\tau) = (1+\tau\lambda)^n y(t)$ .... z linearity

✓ $\lambda = 0$ ⇒ přesné řešení je $y(t) = y_0$ ⇒ Expl. Euler bude přesný

✓ $\lambda > 0$ ⇒ přesné řešení je $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ & roste exponenc. rychle s časem ⇝ expl. Euler to bude dobře mimikovat ... $y(t_0+n\tau) \approx (1+\tau\lambda)^n y(t_0)$ ... také exponenciální

✗ $\lambda < 0$ ⇒ řešení bude oscilovat pokud $1+\tau\lambda < 0$:(

⇒ pokud $\lambda < 0$ & $|1+\tau\lambda| > 1$ pak řešení osciluje & diverguje v abs. hodnotě do $+\infty$:'(:'(

⇝ ta numerická metoda je kvalitativně úplně mimo

→ tomu se říká, že je nestabilní (sedí to na naši definici stability?)

Jak tohle zobecníme pro obecnou Runge-Kutta metodu?

→ spočítám (tužka + papír) jak vypadá $y(t+\tau)$

⇝ dostanu $y(t+\tau) = R(\tau \cdot \lambda) \cdot y(t)$ pro nějakou funkci $R(z)$.

→ chtěl bych aby $|R(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}^-$ (protože pak se mi nemůže stát •)

- s-stage expl. Runge-Kutta: $y(t+\tau) = R(\tau\lambda) \cdot y(t)$

pro studium stability pak stačí zkoumat jak vypadá množina $\{z \text{ t. že } |R(z)| \leq 1\}$ ⇝ protože $z = \tau \cdot \lambda$ & $\underbrace{\forall \lambda \in \mathbb{C}^-}$ máme přesné řešení omezené ($y(t) = e^{\lambda t}$)

tj. λ t. že $Re(\lambda) \leq 0$

tj. ne pouze podmíněně stabilní

⇒ metoda může být stabilní pouze pokud

$$|R(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}^-, \text{ tj. } \mathbb{C}^- \subseteq \{z \text{ t. že } |R(z)| \leq 1\}$$

Lze ukázat, že toho nelze dosáhnout pro explicitní metody

:'(⇒ explicitní metody jsou vždy přinejlepším podmíněně stabilní.

- implicit Euler $y(t+\tau) = y(t) + \tau \cdot \lambda \cdot y(t+\tau) = \frac{1}{1-\tau\cdot\lambda} y(t)$

$\Rightarrow y(t+n\tau) = \left(\frac{1}{1-\lambda\cdot\tau}\right)^n y(t) \Rightarrow$ pokud $\lambda \in \mathbb{C}^-$ pak $\left|\frac{1}{1-\tau\cdot\lambda}\right| < 1$

a tedy dostáváme nepodmíněně stabilní metodu.

⇝ to že v impl. Eulerovy máme „rovnici" a ne „předpis" nám pomáhá se stabilitou ⇝ dává smysl zkusit tohle adaptovat i pro Runge-Kutta:

explicitní	implicitní
$k_1 = f(t, y(t))$	$k_1 = f(t + c_1\tau, y(t) + \tau \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{1,j} \cdot k_j)$
$k_2 = f(t + c_2\tau, y(t) + \tau \cdot a_{2,1} \cdot k_2)$	$k_2 = f(t + c_2\tau, y(t) + \tau \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{2,j} \cdot k_j)$
$\vdots$	$\vdots$
$k_s = f(t + c_2\tau, y(t) + \tau \cdot \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j} \cdot k_j)$	$k_s = f(t + c_s\tau, y(t) + \tau \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{s,j} \cdot k_j)$ (*)
explicitní „předpisy"	implicitní „rovnice"

A lze ukázat, že pro správné volby $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}$ lze získat implicitní Runge-Kutta metody, pro které:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ |y(t+\tau) - y^{RK}(t+\tau)| = \mathcal{O}(\tau^{p+1})_{\tau \to 0} \\ \bullet \ \max\limits_{n=1,\dots,N} |y(t+n\tau) - y^{RK}(t+n\tau)| = \mathcal{O}(\tau^{p})_{\tau \to 0} \end{array}\right\} p \leq 2 \cdot s$$

- tyto metody jsou nepodmíněně stabilní

<u>kde funkce</u> $y^{RK}(t)$ má stejný smysl jako výše.

Tedy za tu práci navíc $\Big($≡ řešení té soustavy rovnic (*) pro získání $k_1, \dots, k_s$$\Big)$

získáme stabilitu &

& až dvojnásobný řád konvergence.

V praxi musím nejprve zjistit jestli moje ODE „produkuje ty oscilace"

ty oscilace" $\xrightarrow{\text{NE}}$ použijeme expl. metodu

$\xrightarrow{\text{ANO}}$ použijeme impl. metodu

takovým ODE se říká „stiff problems"

V praxi zároveň často používáme adaptivní τ ⇝ tj. zkoušíme brát τ co největší to jde a podle nějakých ukazatelů odhadujeme jestli konkrétní τ není moc velké (může např. být tak velké, že by úplně ztratilo část řešení nebo např. může být tak velké, že naše metoda přestane být stabilní)

V praxi je také spousta metod, které se specializují na konkrétní typ problémů, např. při modelování periodického pohybu planet sluneční soustavy bychom rádi, aby se po určitém čase každá planeta vrátila ⇝ tzv. symplektické metody (zachovávají geometrii)