# Přednáška 10 – metody Runge-Kutta

Opáčko: pro rovnici $y'(t) = f(t, y(t))$

jsme odvodili expl./impl. Eulerovu metodu

skrze
- limitu
- kvadraturu
- Taylorův rozvoj

Nevýhoda těchto metod? – „když konvergují, tak pomalu"

co znamená „konvergence":

jak se zmenšuje chyba

$$\max_n \left| y_n^{aprox} - y^{exact}(t_0 + n\tau) \right|$$

když zpřesňujeme „diskretizaci", tj. když $\tau \to 0$

Eulerovy metody jsou odvozeny z kvadratury „mid-point", která je přesná pro polynomy až do 1. stupně. Pokud je naše „pravá strana" $f(t,y)$ hladká funkce, lze ukázat

$$\max_n \left| y_n^{Euler} - y^{exact}(t_0 + n\tau) \right| = \mathcal{O}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^1)$$

a tedy říkáme, že Eulerovy metody jsou 1. řádu

Jak získáme metody vyšších řádů?

→ použijeme kvadratury vyšších řádů →

→ tímto přístupem lze přirozeně odvodit tzv.

Runge-Kutta metody

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Longleftrightarrow \int_t^{t+\tau} y'(\sigma)\, d\sigma = \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y(t+\tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma$$

Jak numericky aproximovat? Použijeme kvadraturu.

$$\Rightarrow y(t+\tau) = y(t) + \sum_{i=1}^{s} w_i \cdot f(\sigma_i, y(\sigma_i))$$

pro nějaké body $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in (t, t+\tau)$ a nějaké váhy $w_1, \dots, w_s \in \mathbb{R}$

⇝ analýza chyby ⟺ analýza chyby kvadratury

⇝ problém: já neznám $y(\sigma_1), \dots, y(\sigma_s)$ →
→ kvadraturní vzorce nejde použít rovnou tak jak jsou

# Příklad 1 – Rungeho metoda

kvadraturní vzorec „midpoint-rule": $\int_\alpha^\beta g(x)\, dx \approx (\beta-\alpha) \cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

použití pro numerické řešení ODR:

$$y(t+\tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \overset{\text{midpoint}}{\approx} y(t) + \tau \cdot f\left(t+\frac{\tau}{2}, y\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right) \overset{\text{expl. Euler}}{\approx}$$

$$\approx y(t) + \tau \cdot f\left(t+\frac{\tau}{2}, y(t) + \tau \cdot \frac{1}{2} f(t, y(t))\right)$$

# Příklad 2 – Heun

kvadraturní vzorec: $\int_\alpha^\beta g(x)\, dx \approx \frac{\beta-\alpha}{4}\left[g(\alpha) + 3 \cdot g\left(\alpha + \frac{2}{3}(\beta-\alpha)\right)\right]$

použití pro numerické řešení ODR:

$$y(t+\tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \approx y(t) + \tau\left[\frac{1}{4} f(t, y(t)) + \frac{3}{4} f\left(t+\frac{2}{3}\tau, y\left(t+\frac{2}{3}\tau\right)\right)\right] \approx$$

$$\approx y(t) + \tau\left[\frac{1}{4} f(t, y(t)) + \frac{3}{4} f\left(t+\frac{2}{3}\tau, k_1\right)\right] =$$

$\frac{1}{2}(t + 2/3\tau - t)$

$$y\left(t+\frac{2}{3}\tau\right) = y(t) + \int_t^{t+2/3\tau} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \overset{\text{Runge}}{\approx} \underbrace{y(t) + \frac{2}{3}\tau f\left(t+\frac{1}{3}\tau, y(t) + \frac{1}{3}\tau f(t, y(t))\right)}_{=: k_1}$$

$$= y(t) + \tau\left[\frac{1}{4} f(t, y(t)) + \frac{3}{4} f\left(t+\frac{2}{3}\tau, y(t) + \frac{2}{3}\tau f\left(t+\frac{1}{3}\tau, y(t) + \frac{1}{3}\tau f(t, y(t))\right)\right)\right]$$

Co lze odvodit za postup?

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \quad \&$$

$$\begin{aligned}
\& \quad k_1 &= f(t, y(t)) \\
k_2 &= f(t + c_2\tau, \; y(t) + \tau \cdot \overset{\text{„}\equiv a_{2,1}\text{"}}{a_2} k_1) \\
k_3 &= f(t + c_3\tau, \; y(t) + \tau(a_{3,1}k_1 + a_{3,2}k_2)) \\
k_4 &= f(t + c_4\tau, \; y(t) + \tau(a_{4,1}k_1 + a_{4,2}k_2 + a_{4,3}k_3)) \\
&\vdots \\
k_s &= f(t + c_s\tau, \; y(t) + \tau(a_{s,1}k_1 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1}))
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ toto je tzv. obecná <u>s-stupňová explicitní Runge-Kutta metoda</u>.

<u>s</u>-stupňová $\Leftrightarrow$ použili jsme s-bodovou kvadraturu

explicitní $\Leftrightarrow$ na vyhodnocení nepotřebuju vyřešit žádné rovnice (viz explicitní vs. implicitní Euler)

$\rightsquigarrow$ tj. $k_i$ závisí pouze na $k_1, \dots, k_{i-1}$

Abychom takovou metodu měli plně zadanou, potřebujeme určit: $b_1, \dots, b_s$ & $c_1, \dots, c_s$, & $a_{i,j}$ pro $i = 1, \dots, s$ & $j < i$

Tyto koeficienty klasicky zapisujeme do tabulky

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & a_{21} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & \cdots & a_{s,s-1} & 0 \\
\hline
 & b_1 & \cdots & \cdots & b_s
\end{array}
\;\equiv\;
\begin{array}{c|c}
\vec{c} & A \\
\hline
 & \vec{b}
\end{array}$$

tzv. Runge-Kutta table / tableau

Butcher table / tableau